CSAI 复习

2025.6.12

提示：

1. 各种概念定理过多，本次讲座的目的是根据问卷，选择一部分困难的内容/题型讲解，知识点不可能全部涉及，看PPT是必要的。

2. 听说 这个课分数还挺高的，不必过于担心~~(还是担心一下随机过程吧)~~。

集合论与组合分析：**证明题**

图论：重要定理+**证明题**【欧拉公式/握手定理……】

代数系统与刚体运动：**概念**+例题

数理逻辑 可以对照下表自行检查还有什么不会的

- **1.判断是否是命题**
- **2.写真值表，判断什么式**
- **3.等值演算**
- 4.等值演算的应用题
- 5.改成析取范式、合取范式
- **6.改成主析取范式、主合取范式，并据此写真值表**
- **7.推理证明：附加前提证明法/反证法**
- **8.谓词逻辑的命题符号化**
- **9.谓词逻辑的换名问题**
- **10.谓词逻辑的解释**
- **11.化为前束范式**

集合论与组合分析

- **1.对称差**
- **2.幂集：注意{Φ}的幂集，Φ的幂集，{Φ}的幂集的幂集 A**
- **3.利用数理逻辑证明集合论的命题**
- **4.证明集合的势**
- **5.伯恩斯坦定理**
- **6.康托集的概念与性质**

利用数理逻辑证明集合论的命题

- 例：用数理逻辑证明：

$$(A\oplus B)\oplus C=(C\oplus B)\oplus A;$$

- （对称差的结合律）

- 例：下式成立吗？请用数理逻辑判断。

$$A\oplus(B\cap C)=(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$$

证明集合的势的方法

- 与某个已知势的集合建立联系
- 阿列夫零：自然数、有理数、……
- 阿列夫：(0,1)、实数、……

- 联系：双射/两个单射（伯恩斯坦定理）

- 例如：用两种办法证明 (0,1) 与 [0,1] 等势

- 常见的一些技巧：
- 可列个可列集合的并仍然可列
- 二进制/三进制编码，映射到 (0,1)【康托集的势，幂集的势】

集合论与组合分析-习题

≈ 表示等势

设A,B,C为集合，其满足$A\cap B=A\cap C=\emptyset$ 且 $B\approx C$，试证明：$A\cup B\approx A\cup C$.

参考解答：

由于$B\approx C$，故存在双射：$f:B\to C$（1 分）；构造$g:A\cup B\to A\cup C$：

$$g(x)=\begin{cases}x & x\in A\\ f(x) & x\in B\end{cases}\quad (1\text{ 分})$$

由于$A\cap B=\emptyset$，故不存在一多映射，所以g是函数（1 分）。下面证明g是单射函数：

假设$g(x_1)=g(x_2)$,若$g(x_1)\in C$则由于$A\cap C=\emptyset,g(x_1)\notin A$,则$g(x)=f(x)$，$f(x_1)=g(x_1)=g(x_2)=f(x_2)$，由于$f$是单射，因此$x_1=x_2$；若$g(x_1)\in A$，则由于$A\cap C=\emptyset$，则$g(x)=x$，故$x_1=g(x_1)=g(x_2)=x_2$故而$x_1=x_2$因此$g$是单射函数。(3 分)

对于任意$y\in A\cup C$，则$y\in A$或者$y\in C$；若$y\in A$，则$y\in A\cup B$且$g(y)=y$；若$y\in C$，则$\exists x\in B,f^{-1}(y)=x$，则$x\in A\cup B$且$g(x)=g\left(f^{-1}(y)\right)=f\left(f^{-1}(y)\right)=y$。因此，$g$是满射函数。(3 分)

综上，g是$A\cup B\to A\cup C$上的双射函数，因此$A\cup B\approx A\cup C$。(1 分)

集合论与组合分析-习题

2.（10 分）所有整系数一元二次方程的根的集合是否可数？请证明你的结论.

解：

所有整系数一元二次方程的根的集合**是可数的**。(4 分)

这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。(2 分)

一个整系数一元二次方程可以表示成 $ax^2+bx+c=0$，其中a、b、c 均是整数。这样，

对应到 Z×Z×Z 中的元素（a, b, c）。这个对应是**单射**。(2 分)

由于 Z 是可数的，不难证明 Z×Z×Z 是可数的。(1 分)

因此，整系数一元二次方程最多有可数个。(1 分)

集合论与组合分析-习题

证明： $2^{\aleph_0} = \aleph$

可数集的幂集的势是阿列夫

这个证明如同证明康托集的势是阿列夫

康托定理：任何集合的幂集的势一定大于其本身的势

集合论与组合分析-习题

3. （12 分）令$\{0,1\}^*$为有限长的$0-1$串的集合，$\{0,1\}^\omega$为无限长的$0-1$串的集合，我们知道前者可数而后者不可数. 试问：

(1) $\{0,1\}^\omega$中仅含有限个字符“1”的串的集合是否可数？为什么？

(2) $\{0,1\}^\omega$中包含无限个字符“1”的串的集合是否可数？为什么？

答：

(1). 可数。记$\{0,1\}^\omega$中仅含有限个字符“1”的串的集合为F，可构造一个从F到$\{0,1\}^*$之间的映射：对于每一个含有限个字符“1”的串，忽略掉其最后一个“1”后的无限多的“0”。易见此映射为单射；而$\{0,1\}^*$可数，于是F可数。(8 分)

(2). 不可数。记$\{0,1\}^\omega$中包含无限个字符“1”的串的集为I，若可数，则$I \cup F = \{0,1\}^\omega$可数，而$\{0,1\}^\omega$不可数，矛盾。故$I$不可数。(4 分)

矩阵论初步与回归分析

- 1.矩阵求导（A，AB，A的逆求导）
- 2.奇异值分解
- 3.求左伪逆矩阵、右伪逆矩阵、求MP逆矩阵
- 4.做R型/S型主成分分析【原理，方法】
- 5.求实值函数的梯度矩阵

- 【这部分内容已经做了资料且做法比较固定】

图论

- **1.握手定理**
- 2.生成子图、导出子图【生成子图的点不能少】
- **3.图的同构**
- **4.邻接矩阵**、关联矩阵、可达矩阵，**利用邻接矩阵计算回路、通路**
- **5.强连通、单向联通图、弱联通（判别，构造）**
- **6.着色问题（判断，点着色/边着色）**
- **7.二部图、匹配、Hall定理（相异性条件、t条件）**
- **8.欧拉图（判别，构造）**
- **9.哈密顿图（判别，构造）**

图论

- **10.平面图、平面嵌入、极大平面图、极小非平面图**
- **11.欧拉公式（证明，单连通 -> 多联通分支）**
- **12.画平面图的对偶图**
- **13.树的概念、余树、弦**
- **14.哈夫曼编码**

判断是否是哈密顿图，哈密顿图

定理7.4

无向图G有欧拉回路，当且仅当G是连通图且无奇度顶点。无向图G有欧拉通路、但无欧拉回路，当且仅当G是连通图且恰有两个奇度顶点。这两个奇度顶点是欧拉通路的端点。

定理7.5

有向图D有欧拉回路，当且仅当D是连通的且每个顶点的入度都等于出度。有向图D有欧拉通路、但无欧拉回路，当且仅当D是连通的，且除了两个顶点外，其余顶点的入度均等于出度。这两个特殊的顶点中，一个顶点的入度比出度大1，另一个顶点的入度比出度小1。任何欧拉通路以前一个顶点为终点，以后一个顶点为始点。

判断是否是哈密顿图，哈密顿图

定理7.6　设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，V_1是V的任意非空子集，则

$$p(G-V_1) \le |V_1|$$

- 无向哈密顿图的一个充分条件

定理7.7

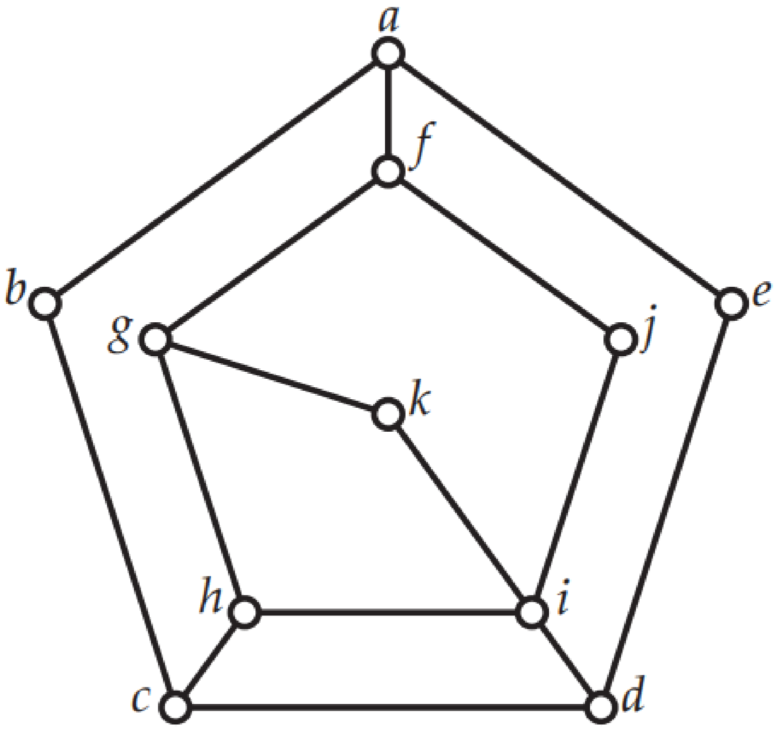
设G是$n(n \ge 3)$阶无向简单图，如果G中任何一对不相邻的顶点的度数之和都大于等于$n-1$，则G中存在哈密顿通路。如果G中任何一对不相邻的顶点的度数之和都大于等于n，则G中存在哈密顿图。

- 有向图的哈密通路

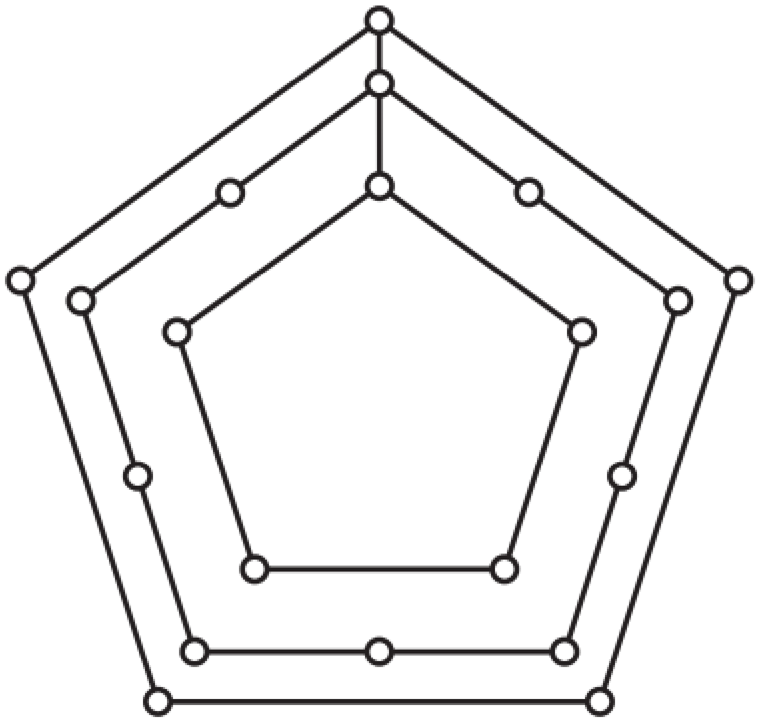
定理7.8

在$n(n \ge 2)$阶有向图$D=<V,E>$中，如果所有有向边均用无向边代替，所得无向图含有生成子图K_n，则有向图D中存在哈密顿通路。

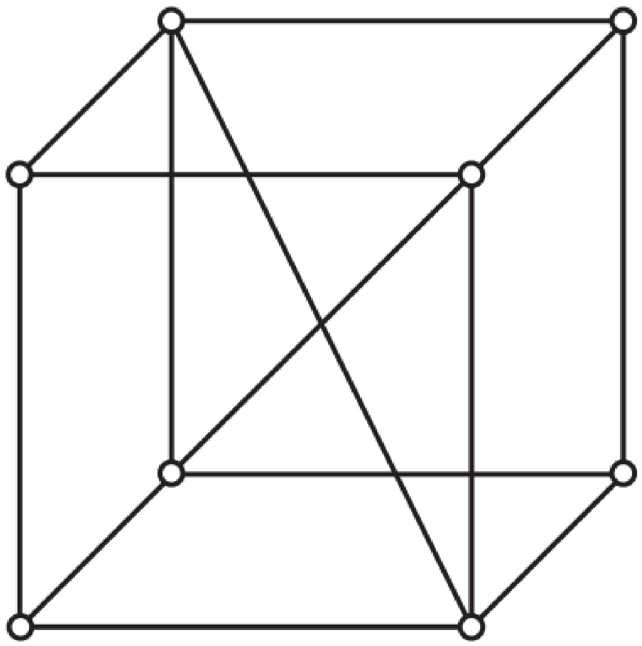
判断是否是哈密顿图，欧拉图



不是欧拉
半哈密顿



半欧拉
不是哈密顿



不是欧拉
是哈密顿

证明题

给出完全二部图$K_{m,n}$是哈密顿图的充要条件，并证明。

给出完全二部图$K_{m,n}$是半哈密顿图的充要条件，并证明。

判断是否是极大平面图

定理7.10 $n(n\geq 3)$阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3。

某简单平面图有6 个顶点，12 条边，求每面的次数，判断是否极大平面图。

加条件：联通

欧拉定理$6-12+r=2 \implies r=8$，则每个面3 次，为极大平面图。

设G 为有8 个顶点的极大平面图，则其面数为？

12

图论中的数量关系：握手定理、欧拉公式

定理7.11（欧拉公式） 设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则有：

$$n - m + r = 2$$

- **推论（欧拉公式的推广）**

设G是有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图，则：

$$n - m + r = p + 1$$

定理7.12 设G为n阶m条边的连通平面图，每个面的次数不小于l ($l \geq 3$)，则:

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

设G为有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图，且每个面的次数不小于l ($l \geq 3$)，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)$$

图论中的数量关系：握手定理、欧拉公式

已知连通简单平面图不含K_3，证明G 的最小度$\delta(G) \leq 3$，G 是可 4-着色的。

每个面的次数最少为4，则有$m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2) \implies m \leq 2n-4$，则$2m \leq 4n-8$

，根据握手定理，$\sum d = 4n-8$，则不可能所有点的度数都≥ 4，即$\delta(G) \leq 3$

接下来证明G 是可 4-着色 的。

使用归纳法，考虑$n = k$ 时成立。

对于$n = k+1$ 的图，除去其最小度的顶点的子图可四着色，着色后，考虑其最小度点，相邻不超过三个点，则可给其用四种颜色中的一种着色，使全图四着色。

$n \leq 4$ 时显然成立。归纳即证。

图论中的数量关系：握手定理、欧拉公式

泥交真题 2020 （有点难）

六、设G=(V,E)是一个简单无向图，|V|=10.
1.如果m=37,那么G一定是哈密顿图吗?请阐述理由.
2.如果m=22,那么G一定是二分图吗?请阐述理由.
3.如果m=25,那么G一定是平面图吗?请阐述理由.
4.如果deg(vi)(i=1~10)均是偶数，并且m=37,那么G一定是欧拉图吗？请阐述理由.

1. 不一定是哈密顿图。构造K9和一个点构成的联通图，这是半哈密顿图
2. 不一定。二分图判定：没有长度为奇数的回路。不知道具体结构没法判断。
3. 一定不是平面图。
4. 一定是欧拉图。【必须说明连通性再用定理】

图论中的数量关系：握手定理、欧拉公式

备用

平面图G满足$\delta(G) \geq 3$且$r < 12$，证明G有不超过四次的面。

这题的重大坑点是没有说连通，要用拓展欧拉公式。$n - m + r = k + 1$，$2m \leq 3n$，假设都超过四次，则$2m \geq 5r$，联立解得$6r - 6k - 6 \geq 5r \implies r \geq 6k + 6 \geq 12$，与题设$r < 12$矛盾，则一定有不超过四次的面。

图论中的数量关系：握手定理、欧拉公式

备用

设G是$n \geq 11$的平面图，证明其补图是非平面图。

代数系统与三维刚体运动

- **1.群、环、域的概念与性质（例：判断...是否构成群？）**
- **2.旋转矩阵的概念、性质**
- **3.旋转向量**
- **4.四元数的概念、运算法则**
- 5.欧拉角
- **6.旋转矩阵、旋转向量、四元数、欧拉角的互相转换（推导）**

代数系统

PPT 可能不太严谨，有点容易误解

证明是群：<集合，运算>

首先证明构成代数系统：**运算是封闭的**，结果唯一性

再证明：
有结合律、**有幺元、有逆元**

若满足交换律，则是交换群（阿贝尔群）
例如：<Z, *> 是否构成群?

代数系统

证明是环：<集合，运算1，运算2>

首先证明 <集合，运算1> 构成阿贝尔群

再证明：
<集合，运算2> 构成半群（封闭，结合）

再证明：
运算2 对 运算1有分配律

运算2 满足交换律，则称为交换环

代数系统

证明是域：<集合，运算1，运算2>

首先证明<集合，运算1，运算2>构成环

再证明 <集合，运算1，运算2> 构成交换环

再证明除了零元（指第一个运算的幺元，也是第二个运算的零元）外 <集合，运算2> 构成群（再满足有幺元、逆元）

除了零元外构成群的交换环是域

代数系统-习题

五、（**本题 10 分**）Q 表示有理数集，+为加法，× 为乘法。请证明 $<Q,+,\times>$ 为域。

证明：设 a 是群 $<G,\circ>$ 的幂等元，则 a 一定是单位元。

设 $i=\sqrt{-1}$，$S=\{1，-1，i，-i\}$，证明 $<S,*>$ 构成群，其中 $*$ 为复数域上的乘法运算。

证明：G 为交换群当且仅当 $\forall a,b\in G$，有 $(ab)^2=a^2b^2$。

三维刚体运动

这一章在干什么？

研究三维刚体姿态的各种表征。群是一个研究工具。

为什么有那么多种表征？

用欧氏空间表征平移是连续的、可微的，没有奇异性。然而找不到这么完美的表征来表示旋转。各种表征各有优劣。所以就要学好多。

欧拉角有万向锁问题，旋转向量/四元数没有奇异性但是有多解性（正负一样）。SO(3) 非线性，不能直接用于数值优化，底层实现都是转为四元数/欧拉角进行。

三维刚体运动

四元数的运算（虚数单位看成叉乘）

各种表征之间的转换，可以出计算/证明（求迹）

自行过PPT即可

从李群与李代数理解更好（指数映射，也是容易证明的）

三维刚体运动

例如：给公式 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T + s^2\boldsymbol{I} + 2s\boldsymbol{v}^\wedge + (\boldsymbol{v}^\wedge)^2.$

请用旋转向量表示四元数/用四元数表示旋转向量

例如：给罗德里格斯公式，从旋转矩阵推旋转向量

证明过程在PPT上，关键是求迹

三维刚体运动： 根据矩阵指数证明罗德里格斯公式

$$\boldsymbol{R} = e^{\boldsymbol{\phi}^\wedge} = e^{\theta \boldsymbol{a}^\wedge} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta \boldsymbol{a}^\wedge)^n$$

$$= \boldsymbol{I} + \theta \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{2!}\theta^2 \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^4 (\boldsymbol{a}^\wedge)^4 + \ldots$$

$$= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \theta \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{2!}\theta \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge - \frac{1}{3!}\theta^3 \boldsymbol{a}^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^4 (\boldsymbol{a}^\wedge)^4 + \ldots$$

$$= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + (\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \ldots)\boldsymbol{a}^\wedge - (1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \ldots)\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge$$

$$= \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge - \cos\theta \boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge$$

$$= (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}^\wedge \boldsymbol{a}^\wedge + \boldsymbol{I} + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge$$

$$= \cos\theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \sin\theta \boldsymbol{a}^\wedge$$

三维刚体运动 补充

三维旋转

李群

$SO(3)$

$R \in \mathbb{R}^{3\times3}$

$RR^T = I$

$\det(R) = 1$

指数映射

$$\exp(\theta a^\wedge) = \cos\theta I + (1-\cos\theta) a a^T + \sin\theta a^\wedge$$

对数映射

$$\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2} \qquad Ra = a$$

李代数

$\mathfrak{so}(3)$

$\phi \in \mathbb{R}^3$

$$\phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

三维变换

李群

$SE(3)$

$T \in \mathbb{R}^{4\times4}$

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

指数映射

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\phi^\wedge) & J\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) a a^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge$$

对数映射

$$\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2} \qquad Ra = a \qquad t = J\rho$$

李代数

$\mathfrak{se}(3)$

$$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

谢谢大家！